

ΑΣΚΗΣΗ 2

ΑΛΓΕΒΡΑ BOOLE

2.1 ΣΚΟΠΟΣ

Η κατανόηση των αξιωμάτων και των θεωρημάτων της Άλγεβρας Boole. Η γνώση της εξαγωγής μιας Λογικής Συνάρτησης από τον Πίνακα Αληθείας και του τρόπου υλοποίησης ενός λογικού κυκλώματος από την Λογική Συνάρτηση.

2.2 ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

Ο Άγγλος μαθηματικός *George Boole* περιέγραψε διάφορες προτάσεις που μπορεί να είναι μόνο αληθείς (*true*) ή μόνο ψευδείς (*false*) και με βάση κάποια αξιώματα δόμησε την Άλγεβρα Boole. Σε αυτή την Άλγεβρα της Δυαδικής Λογικής όλες οι μεταβλητές (λογικές μεταβλητές) καθώς και οι συναρτήσεις τους (λογικές συναρτήσεις) παίρνουν μόνο δύο τιμές. Οι πράξεις της Δυαδικής Λογικής είναι οι: ΚΑΙ (AND), Ή (OR) και ΑΡΝΗΣΗ (NOT). Οι πράξεις αυτές υλοποιούνται με πύλες, δηλαδή ηλεκτρονικά κυκλώματα που η έξοδός τους μπορεί να είναι *1* (*high* ή *true*) ή *0* (*low* ή *false*).

2.2.1 ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Η Άλγεβρα Boole είναι το σύνολο $B = \{a, b, c, \dots\}$ που τα στοιχεία του a, b, c, \dots παίρνουν μόνο 2 τιμές (0,1) και το σύνολο αυτό είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις (+, •) και μερικά αξιώματα.

Αξίωμα 1: Το αποτέλεσμα των πράξεων ΚΑΙ (•) και Ή (+) μεταξύ των στοιχείων a, b, c, \dots ανήκει στο B.

Αξίωμα 2: Για τις παραπάνω πράξεις ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\begin{aligned}a + b &= b + a \\ a \bullet b &= b \bullet a\end{aligned}$$

Αξίωμα 3: Ισχύει ο επιμερισμός και για τις δύο πράξεις:

$$\begin{aligned}a \bullet (b + c) &= a \bullet b + a \bullet c \\ a + b \bullet c &= (a + b) \bullet (a + c)\end{aligned}$$

Αξίωμα 4: Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για την πράξη (•) και την πράξη (+).

$$\begin{aligned}0 + a &= a \\ 1 \bullet a &= a\end{aligned}$$

Αξίωμα 5: Για κάθε στοιχείο του B υπάρχει συμπλήρωμα $\bar{a} \in B$:

$$\begin{aligned}a + \bar{a} &= 1 \\ a \bullet \bar{a} &= 0\end{aligned}$$

• Σημείωση:

Παρατηρείστε ότι στα παραπάνω αξιώματα ισχύει ο <<δυσισμός>> (*duality*). Δηλαδή αντικαθιστώντας το (•) με το (+) και το 1 με το 0 ή το αντίθετο, λαμβάνεται η δεύτερη μορφή του αξιώματος.

2.2.2 ΠΡΑΚΤΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

$$\begin{aligned} 1 + 1 &= 1 \\ 0 + 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \cdot 1 = 0 \\ 1 + 0 &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

2.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Θεώρημα 1:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a + 1 = 1, \quad a + 0 = a \\ (\beta) \quad & a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a \end{aligned}$$

Θεώρημα 2:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a + a = a \\ (\beta) \quad & a \cdot a = a \end{aligned}$$

Θεώρημα 3:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a + \bar{a} = 1, \quad \bar{1} = 0 \\ & a \cdot \bar{a} = 0, \quad \bar{0} = 1 \end{aligned}$$

Θεώρημα 4 (De Morgan):

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & \overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \\ (\beta) \quad & \overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \end{aligned}$$

Θεώρημα 5:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a + a \cdot b = a \\ (\beta) \quad & a \cdot (a + b) = a \end{aligned}$$

Θεώρημα 6:

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & a + (b + c) = (a + b) + c \\ (\beta) \quad & a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c \end{aligned}$$

2.2.4 ΛΟΓΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ BOOLE

Μια λογική συνάρτηση z είναι μία συνάρτηση που οι μεταβλητές της παίρνουν μόνο τις τιμές 0 και 1 (μεταβλητές της Άλγεβρας Boole) και συμβολίζεται ως $z = f(x, y, \dots)$, όπου x, y, \dots οι ανεξάρτητες μεταβλητές και z η εξαρτημένη μεταβλητή. Σε μία λογική συνάρτηση μπορούν να υπάρχουν οι πράξεις $(+)$, (\cdot) και η αντιστροφή.

Μία συνάρτηση με n μεταβλητές μπορεί να παρασταθεί με έναν πίνακα αληθείας όπου αναγράφονται οι 2^n πιθανοί συνδυασμοί των 0 και 1 των ανεξάρτητων μεταβλητών και η αντίστοιχη τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής, δηλαδή της συνάρτησης.

Με τη βοήθεια των Πινάκων Αληθείας είναι δυνατόν να ελεγχθεί αν δύο συναρτήσεις είναι ίσες. Π.χ. για τις συναρτήσεις:

$$\begin{aligned} F_1 &= x'z' + x'z + y' \quad \text{και} \\ F_2 &= y' + x'z \end{aligned}$$

συμπληρώνεται ο παρακάτω Πίνακας Αληθείας.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΛΗΘΕΙΑΣ 1 (Π.Α. 1)

x	x'	y	y'	z	z'	xy'	x'z	x'y'z	x'yz	F ₁	F ₂
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0

Από τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα αληθείας είναι φανερό ότι $F_1 = F_2$.

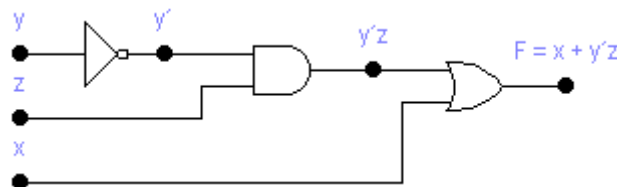
Πολλές φορές είναι προτιμότερο **να απλοποιείται** μία συνάρτηση με χρήση των θεωρημάτων και των αξιωμάτων της **άλγεβρας Boole** έτσι ώστε να καταλήγει στη μορφή της άλλης. Π.χ.

$$F_1 = x'y'z + x'yz + y'z = x'(y' + y)z = x'z = F_2$$

2.2.5 ΥΛΟΠΟΙΗΣΗ ΛΟΓΙΚΟΥ ΚΥΚΛΩΜΑΤΟΣ ΑΠΟ ΤΗ ΛΟΓΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Μία συνάρτηση μπορεί να μετασχηματισθεί σε ένα λογικό κύκλωμα με πύλες ΚΑΙ, Ή και ΟΧΙ.

Παράδειγμα: $F = x + y'z$



2.2.6 ΕΛΑΧΙΣΤΟΙ ΚΑΙ ΜΕΓΙΣΤΟΙ ΟΡΟΙ

Ελάχιστοι όροι (Minterms) μίας λογικής συνάρτησης ονομάζονται οι όροι που αποτελούνται από **το λογικό ΚΑΙ κάθε δυνατού συνδυασμού των μεταβλητών της συνάρτησης ή των συμπληρωμάτων τους**. Οι ελάχιστοι όροι συμβολίζονται με το γράμμα **m** και ένα δείκτη **i** (**m_i**), όπου **i** θετικός αριθμός.

Μέγιστοι όροι (Maxterms) μίας λογικής συνάρτησης ονομάζονται οι όροι που αποτελούνται από **το λογικό Ή κάθε δυνατού συνδυασμού των μεταβλητών της συνάρτησης ή των συμπληρωμάτων τους**. Οι μέγιστοι όροι συμβολίζονται με το γράμμα **M** και ένα δείκτη **i** (**M_i**), όπου **i** θετικός αριθμός.

Για n μεταβλητές υπάρχουν 2^n ελάχιστοι και 2^n μέγιστοι όροι. Κάθε ελάχιστος όρος είναι το συμπλήρωμα ενός μέγιστου όρου και αντίθετα. Δηλαδή:

$$m_i = \overline{M_i}$$

$$M_i = \overline{m_i}$$

Παρακάτω φαίνονται οι ελάχιστοι και οι μέγιστοι όροι τριών μεταβλητών.

<u>xyz</u>	<u>minterm</u>	<u>maxterm</u>
000	$m_0 \Leftrightarrow x'y'z'$	$M_0 \Leftrightarrow (x+y+z)$
001	$m_1 \Leftrightarrow x'y'z$	$M_1 \Leftrightarrow (x+y+z')$
010	$m_2 \Leftrightarrow x'yz'$	$M_2 \Leftrightarrow (x+y'+z)$
011	$m_3 \Leftrightarrow x'yz$	$M_3 \Leftrightarrow (x+y'+z')$
100	$m_4 \Leftrightarrow xy'z'$	$M_4 \Leftrightarrow (x'+y+z)$
101	$m_5 \Leftrightarrow xy'z$	$M_5 \Leftrightarrow (x'+y+z')$
110	$m_6 \Leftrightarrow xyz'$	$M_6 \Leftrightarrow (x'+y'+z)$
111	$m_7 \Leftrightarrow xyz$	$M_7 \Leftrightarrow (x'+y'+z')$

2.2.7 ΕΞΑΓΩΓΗ ΛΟΓΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΑΠΟ ΤΟΝ ΠΙΝΑΚΑ ΑΛΗΘΕΙΑΣ

Μία λογική συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί σαν το λογικό άθροισμα (' Η) των **ελάχιστων όρων** που κάνουν τη συνάρτηση να παίρνει την **τιμή 1**.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση F_1 του Π.Α.1:

$$F_1 = m_1 + m_3 + m_4 + m_5 = \Sigma(1, 3, 4, 5)$$

Μία λογική συνάρτηση μπορεί να εκφρασθεί σαν το λογικό γινόμενο (ΚΑΙ) των **μέγιστων όρων** που κάνουν τη συνάρτηση να παίρνει την **τιμή 0**.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση F του τελευταίου Πίνακα Αληθείας γράφεται:

$$F_2 = M_0 \cdot M_2 \cdot M_6 \cdot M_7 = \Pi(0, 2, 6, 7)$$

2.3 ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ

2.3.1

Το συμπλήρωμα μίας συνάρτησης βρίσκεται από το θεώρημα De Morgan.

$$(A + B + C)' = A' \cdot B' \cdot C'$$

$$(A \cdot B \cdot C)' = A' + B' + C'$$

Πραγματοποιήστε τα κατάλληλα κυκλώματα για να αποδείξετε τις παραπάνω ισότητες.

2.3.2

Ένας τρόπος για να βρεθεί το συμπλήρωμα μιας συνάρτησης είναι να πάρουμε το δυαδικό (dual) μίας συνάρτησης και να αντιστρέψουμε κάθε μεταβλητή. Π.χ.

$$F = x'z' + x'y'$$

$$\text{Δυαδικό της } F: (x' + y + z') \cdot (x' + y' + z)$$

$$\begin{aligned} \text{Συμπλήρωμα κάθε μεταβλητής: } & (x + y' + z) \cdot (x + y + z') \\ \Rightarrow F' = & (x + y' + z) \cdot (x + y + z') \end{aligned}$$

Πραγματοποιήστε τα κατάλληλα κυκλώματα για να αποδείξετε ότι η F' είναι το συμπλήρωμα της F .

2.3.3

Πραγματοποιήστε το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στον παρακάτω πίνακα αληθείας και επαληθεύστε τη λειτουργία του.

A	B	C	D	F
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

2.3.4

Πραγματοποιήστε το λογικό κύκλωμα που αντιστοιχεί στη συνάρτηση:

$$F = \Pi(0, 1, 5)$$

2.4 ΓΡΑΠΤΗ ΑΣΚΗΣΗ

2.4.1

Να γραφούν τα κυκλώματα και οι πίνακες αληθείας του πειραματικού μέρους.

2.4.2

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση των παρακάτω ερωτήσεων πολλαπλής επιλογής.

1. Εάν $F = A'B' + C' + D' + E'$, ποια είναι η σωστή έκφραση για την F' ;
 1. $F' = A + B + C + D + E$
 2. $F' = ABCDE$
 3. $F' = AB(C + D + E)$
 4. $F' = AB + C' + D' + E'$
 5. $F' = (A + B)CDE$
2. Ποια η ισοδύναμη έκφραση της $A' + 1$;
 1. A
 2. A'
 3. 1
 4. 0
3. Απλοποίηση της $AB + ABC + ABCD + ABCDE + ABCDEF$ αποτελεί η;
 1. $ABCDEF$
 2. AB
 3. $AB + CD + EF$
 4. $A + B + C + D + E + F$
 5. $A + B(C + D(E + F))$
4. Απλοποιήστε την $(A + B + C)(D + E)' + (A + B + C)(D + E)$ και επιλέξτε την καλλίτερη απάντηση.
 1. $A + B + C$
 2. $D + E$
 3. $A'B'C'$
 4. $D'E'$
 5. Καμία από τις παραπάνω
5. Εάν $F(X, Y, Z) = XZ + Z(X' + XY)$, η πιο απλοποιημένη ισοδύναμη έκφραση είναι η;
 1. $Z + YZ$
 2. $Z + XYZ$
 3. XZ
 4. $X + YZ$
 5. Καμία από τις παραπάνω
6. Απλοποίηση της $(A + B)'(C + D + E)' + (A + B)$ αποτελεί η;
 1. $A + B$
 2. $A'B'$
 3. $C + D + E$
 4. $C'D'E'$
 5. $A'B'C'D'E'$